746. Doeblin ノ結果ノ積分方程式的取扱ヒ

吉田　耕作（阪大）

W. Doeblin ノ論文 *Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certaines types* de chaîne simple (Bull. math. Soc. Roumaine de Sc. 39 (1937)) ノ主ナ結果ヲ角谷氏ガ談話728, 739, 743ニ於テワカリ易ク補ヒナガラ紹介サレタ。相當精シイ結果デアリ且ツソノ集合論的論法ハ面白イケレドモ，次ノ如ク積分方程式流ノ取扱ヒヲスルト spectre トノ關係モツクシ談話679, §6ノ$\boxed{\text{定理}}$[1]ノ應用ニモナルノデ之レヲ述ベテミヨウ。尚本談話ニ色々御助力ヲ受ケタ角谷氏ニ厚ク感謝致シマス。

§1. 豫備

$P(x,E)$ハx $(0\leqq x\leqq 1)$ヲ fix スレバ $(0,1)$ 内ノ Borel 集合ニ關シテ total-additive non negative 且ツ$P(x,\Omega)\equiv 1$, $\Omega=(0,1)$. 又Eヲ fix スレバxニ關シテ Borel measurable トスル。今

$$(1)\quad \begin{cases} 0<\eta,\ \varepsilon<1 \text{ ガ存在シテ } x \text{ ニ關シテ一樣ニ} \\ mes(E)<\eta \text{ ナラバ } P(x,E)<1-\varepsilon \end{cases}$$ [2]

ガ滿足サレタリトスレバ[3]

$$P(x,E)=\int_E g(x,y)\,dy+R(x,E);\quad 0\leqq g(x,y)\leqq\frac{1}{\eta},$$

$$0\leqq R(x,E)\leqq 1-\varepsilon.$$

---

(1) 角谷氏談話680ノ定理6ニ別證明ヲ與ヘラレタ。

(2) Doeblin ノ條件.

(3) 角谷氏談話738, P.572.

ヨッテコノ積分 operator ニヨッテ $(\mathfrak{M})$[1] ヲ $(\mathfrak{M})$ 内ニ寫ス線型 operator

$$P=Q+R,\quad \psi=P\cdot\varphi,\quad \psi(E)=\int_0^1\varphi(dx)P(x,E)$$

ハ $\|P\|=1$, $\|Q\|\leq 1$, $\|R\|<1-b$ ヲ滿足スル。 Q ガ vollstetig ナラ談話 679 ノ $\boxed{\text{定理}}$ ガ使ヘテ Doeblin ノ結果ガ積分方程式流ニ扱ヘルコトガワカツタ。然シ有界可測ナ核ニヨル積分 operator ハ空間 (L) デハ一般ニハ vollstetig ニナラヌ[2] カラ Q ハ vollstetig ニハナラナイ。[3] 所ガ $\boxed{\text{定理}}$ ヲ使フニハ $\|P^n-V\|<1$ ナル如キ n ト vollstetig ナ V ガアレバヨイノダカラ，上ノ Q ヲ今少シ調ベタラ望ミガアルカモ知レヌト思ッテ考ヘテミヌ。ソウシタラ談話 744 ノ定理ヲ得タ。[4] 之レヲ使ヘバ P ニ $\boxed{\text{定理}}$ ノアテハマルコトガワカル。即チ

---

(1) (0,1) ノ Borel 集合デ total additive ナ集合函数 $\varphi(E)$ ノ作ル Banach 空間: norm $\|\varphi\|=\varphi$ ノ total variation

(2) 嘗テ筆者ノ疑問ニ対シ角谷氏ガ例ヲ作ッテ下サッタ。談話 744 ニアゲテアル。

(3) 併シ schwach vollstetig ニハナル。角谷氏談話

(4) 筆者ノ証明ハ Kolmogoroff - Riesz ノ定理ノ他ニ Egoroff ノ定理ヲ援用シ甚ダ拙イモノデアッタ。

談話 744 ニノセタ証明並ニ注意ハ三村氏ニヨル。尚本号ノ談話参照。

Lemma 1. $\|P^n - \nabla\| < 1$ ナル如キ n ト vollstetig ナ ∇ トガ存在スル（$\|P\| = 1$ ダカラ従ッテ $\boxed{\text{定理}}$ ガ P ニ對シアテハマル）。

証明：　$P^n = Q^n + Q^{n-1}R + Q^{n-2}RQ + \cdots\cdots + RQR^{n-2}$

$$+ QR^{n-1} + R^n.$$

$RQ^{n-3}RQ$ ノ如ク Q ヲ factor トシテ少クトモ二ツ含ム term ハ vollstetig. 何者，$Q^{n-3}R, Q$ ハ夫々有界可測ナ核ニヨル積分 operator ダカラ $r(x,y), s(x,y)$ ヲ夫々有界可測トスルトキ（R ハ stetig）

$$\varphi \longrightarrow \Phi,\quad \Phi(E) = \int_0^1 \varphi(dx) \int_E dz \int_0^1 dy\, r(x,y)\, s(y,z)$$

ガ vollstetig ナコトヲ云フトヨイ。ソノタメニハ Φ ハ絶対連続ダカラ Φ ノ微分ガ (L) ノ norm ノ意味デ compact ナラヨイ。[1] ソノ compact ノ証明ハ定理ト同様ニシテ得ラレル。

Q ヲ高々一ツシカ factor トシテ含マヌ term ノ数ハ $n+1$ コ，且ツ各々ノ norm $\le (1-b)^{n-1}$ ダカラ，n ヲ充分大キクトレバ $(n+1)(1-b)^{n-1} < 1$ ニヨリ Lemma ヲ

---

(1) $Q^{n-3}RQ = Q^{n-3}(RQ)$ ト分解シテ定理ガ使ヘルト思ッタノデスガ角谷氏ガ $(Q^{n-3}R)\cdot Q$ ト分解スレバヨイト考ヘテ下サッタ。trivial ダッタ訳デ汗顔ノ至リデス。尚有界可測ナ核ガ schwach vollstetig ナコトカラ定理ノ注意ノ様ニシテモ証明出来ル訳デス。ソノトキニハ分解スルコトハ要リマセン。

得ル。

<u>*Lemma* 2</u>. P^n ノ絶対値 1 ノ固有値 λ ハ $\lambda^m = 1$（m ハ正整数 $\leqq \frac{1}{\eta}$）ヲ満足スル。P^k（$k \geqq n$）ニツイテモ同様。

証明[(1)].

$$\varphi(E) = \lambda \int_0^1 \varphi(dx) P^{(n)}(x, E), \quad |\lambda| = 1, \quad \|\varphi\| = 1$$

トスル。P^n ガ $\boxed{\text{定理}}$ ノ條件満足スルカラ, P^n ノ固有値 λ ニ属スル固有空間ヘノ *projection operator* P_λ ヲ定義スル $P_\lambda(x, E)$ ガ存在スル。即チ

$$\varphi(E) = \int_0^1 \varphi(dx) P_\lambda(x, E),$$

$$\lambda P_\lambda(x, E) = \int_0^1 P^{(n)}(x, dy) P_\lambda(y, E) = \int_0^1 P_\lambda(x, dy) P^{(n)}(y, E),$$

$$P_\lambda(x, E) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{P^{(ni)}(x, E)}{\lambda^i} \quad \text{（一様收斂）}.$$

故ニ任意ノ $g(y) \in (M)$ ニ對シ (M) ニ属スル

$$h(x) = \int_0^1 P_\lambda(x, dy)\, g(y)$$

ハ固有値方程式

$$(*) \quad h(x) = \lambda \int_0^1 P^{(n)}(x, dz)\, h(z)$$

---

(1) P^n ノ共軛 *operator* ノ具体的ナ形ガワカラヌカラ, *Mazur* 定理ノ拡張（談話 736）ヲ使フ証明ハスグ出来ナイ。然シココデノ *idea* ハ談話 736 ニ於ケルト同ジデアス。

ヲ満足スルコトガワカル。$\|\varphi\|=1$ ダカラ P_λ ハ zero operator デナイ。從ッテ φ ヲ適當ニトルト $h\neq 0$。ソウスレバ $\lambda^m=1$（m 有界）ナコトハ Frechet ノ論法デワカル。[1]

<u>Lemma 3.</u>　P^k ノ固有値1ノ multiplicity ハ k ニ對シテ一様有界デアル。

證明：　全ベテノ k ニ對シ $P^{(k)}(x,E)$ ハ同ジ b,η デ Doeblin ノ條件ヲ充スコト明カダカラ，談話 724, §12 系ト同じコトヲヤルトヨイ。アソコデ使ッタノハ，今ノ case デ云フト

$$\varphi(E)=\int_0^1\varphi(dx)P^{(n)}(x,E)$$

ナラ φ ノ total variation on E：$\tilde{\varphi}(E)$ ガ又

$$\tilde{\varphi}(E)=\int_0^1\tilde{\varphi}(dx)P^{(n)}(x,E)$$

ヲ満足スルト云フコトデアッタカラ。[2]　　—— 以上 ——

故ニ Lemma 1, Lemma 2, Lemma 3 カラ充分 n ヲ大キクトルト P^n ハ $\boxed{\text{定理}}$ ノ條件ヲ満足シ且ツ P^n ハ1以外ニ絶對値1ノ固有値ヲモタヌ。ヨッテ $\boxed{\text{定理}}$ カラ

---

(1)　談話 736, p.594 ヲミラレタイ。尚コノ Lemma ノ証明ニハ $\boxed{\text{定理}}$ ヲ使ハズトモ mean ergodic theorem デ間ニ合フコトハ注意スル迄モナイ。

(2)　Kryloff-Bogoliouboff ノ論法（談話 678, §3，訂正談話 679 參照）

$$
(2)\ \begin{cases} P^n = P_1 + S,\ P_1 S = S P_1 = 0,\ P_1^2 = P_1 = P^n P_1 = P_1 P^n \\ \|S^m\| \leqq \dfrac{c}{(1+\delta)^m}\ (c, \delta > 0),\ P_1 = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{m}(P^n + P^{2n} + \cdots + P^{nm})^{(1)}. \end{cases}
$$

ヨッテ P_1 ヲ定義スル non-negative ナ $P_1(x, E)$ ハ

$$
(3)\quad P_1(x, E) = \int_0^1 P_1(x, dy) P^{(n)}(y, E), \quad P_1(x, \Omega) = 1
$$

ヲ満足スル。所ガ尚

Lemma 3 ノ証明ト同様ニシテ（Kryloff-Bogolioúboff ノ論法）デ $\varphi_1(E), \varphi_2(E), \cdots\cdots, \varphi_k(E)$ ガ存在シテ

$$
(4)\ \begin{cases} \varphi_i \geqq 0,\ \varphi_i(E)\,\varphi_j(E) = 0,\ \varphi_i(\Omega) = 1. \\ \qquad\qquad \varphi_i(E) = \int_0^1 \varphi_i(dx) P^{(n)}(x, E). \\ \text{且 } \varphi \geqq 0,\ \varphi(\Omega) = 1,\ \varphi(E) = \int_0^1 \varphi(dx) P^{(n)}(x, E) \\ \text{ナル如キ任意ノ } \varphi \text{ ハ } \varphi(E) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i\, \varphi_i(E),\ c \text{ 常数} \\ \geqq 0,\ \sum c_i = 1 \text{ ト表ハサレル。} \end{cases}
$$

§2. Doeblin ノ結果ノ導キ方

(3), (4) ニヨリ

$$
(5)\quad P_1(x, E) = \sum_{i=1}^{k} c_i(x) P_i(E),\quad c_i(x) \geqq 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^{k} c_i(x) = 1.
$$

$\varphi \geqq 0,\ \varphi(\Omega) = 1$ ナラ $\psi = P\cdot\varphi$ ハ又 $\psi \geqq 0,\ \psi(\Omega) = 1$ ヲ満ス。$P^n(P\varphi_i) = P(P^n \varphi_i) = P\varphi_i$ ダカラ (4) ニヨリ

---

(1) uniform limit

$$(6)\quad P\varphi_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\varphi_j\ ,\quad c_{ij}\geqq 0 \ \text{且ツ}\ \sum_{j=1}^{k} c_{ij} = 0$$

$$(i=1,2,\ldots\ldots,k)$$

$P^n\cdot\varphi_i = \varphi_i$ ニヨリ行列 $C=\| c_{ij}\|$ ハ $C^n=$ unit matrix. コノコトカラ C ハ k コノ文字 $1,2,\ldots\ldots,k$ ノ permutation ヲ表ハスコトガワカル。何者、$C^{n-1}\|c_{ij}^{(n-1)}\|$ ト置クト

$c_{ij}^{(n-1)}\geqq 0$, $\sum_{j=1}^{k} c_{ij}^{(n-1)} = 1$ ダカラ $C^{n-1}\cdot C=$ unit matrix ナル掛ケ算ヲ実際書キ下シテミルトワカル。[1]

故ニ $\varphi_1,\varphi_2,\ldots\ldots,\varphi_k$ ハ P ヲ施スト cyclic ニ permutate サレル幾ツカノ組ニワカレル。之等ノ組ヲ第1組, 第2組, ……. 第s組ト名付ケ且ツ第i組ニ入ッテルφノ個数ヲ d_i トスル: $\sum_{i=1}^{s} d_i = k$.

φ_i ハ total additive non negative ダカラ Radon-Nikodym ノ定理[2] ニヨリ $\varphi_i(E)=\int_E f_i(x)\,dx+\varphi_i(H_i\cdot E)$ ($f_i\geqq 0$, H_i ハ measure zero ノ集合). ヨッテ $f_i(x)>0$ ナル如キ x ノ集合ニ H_i ヲ付ケ加ヘタモノヲ $\mathcal{E}_i$ トスレバ (4) ニヨリ $\mathcal{E}_i$ ハ互ニ disjoint 且 $\varphi_i(\mathcal{E}_i)=1$ 又 $\varphi_i(E)>0$ if $E\subset\mathcal{E}_i$, mes$(E)>0$.

(6) $G_\alpha = \sum \mathcal{E}_i$ (φ_i ガ第α組ニ入ッテル様ナ i ニ付イテノ和)

---

(1) 之ハ角谷氏ニ考ヘテ頂イタ。極メテ面白イコトデス。

(2) Saks: Theory of integrals, p.

ト置ケバ，Doeblin ノ結果（角谷氏談話 728）ニ於ケル

G_α $(\alpha=1,2,\cdots\cdots,s)$ ガ final set ヲ態シ且 d_α ハ G_α ニ attach サレタ数デアル。

証明．　以下ノ事実ヲ証明スル。

i)　$x\in\Omega$ ニ對シテ一様ニ

$$P^{(t)}(x,\Omega-\sum G_\alpha)\leqq M\tau^t \qquad (t=1,2,\cdots\cdots)$$

ナル如キ常数 $M>0$，$1>\tau>0$ ガ存在スル。

ii)　殆ド全テノ $x\in G_\alpha$ ニ對シテ $P(x,G_\alpha)=1$

iii)　$G'_\alpha\subset G_\alpha$ 且 $mes(G_\alpha-G'_\alpha)=0$ ナル如キ G'_α ガ存在シテ $E\subset G_\alpha$，$mes(E)>0$ ナラバ，$P^{(m)}(x,E)>0$ for $x\in G'_\alpha$ ナル如キ $m=m(x,E)$ ガ定ル。

iv)　$\mathcal{E}_i\subset G_\alpha$ ナラバ，$x\in(G'_\alpha\cdot\mathcal{E}_i)$ 及ビ $E\subset\mathcal{E}_i$ ニ對シテ一様ニ $|P^{(md_\alpha)}(x,E)-\varphi_i(E)|\leqq N\sigma^{-m}$ $(m=1,2,\cdots\cdots)$ ナル如キ常数 $N>0$，$1>\sigma>0$ ガ定ル。

i) ノ証明．　$\mathcal{E}_i$ ノ定義ト (2), (5) カラ

$$P^{(ns)}(x,\Omega-\sum G_\alpha)=P^{(ns)}(x,\Omega-\sum\mathcal{E}_i)$$
$$=S^{(ns)}(x,\Omega-\sum\mathcal{E}_i)$$

ヨッテ，(2) ト $\|P\|=1$ カラ明カ。

ii) ノ証明．　$G_1=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\cdots\cdots+\mathcal{E}_{d_1}$ トスルト

$P\varphi_1=\varphi_2$，$P\varphi_2=\varphi_3,\cdots\cdots,P\varphi_{d_1}=\varphi_1$ ダカラ

$$\varphi_1(E)+\varphi_2(E)+\cdots\cdots+\varphi_{d_1}(E)$$

$$=\int_0^1\{\varphi_1(dx)+\varphi_2(dx)+\cdots\cdots+\varphi_{d_1}(dx)\}P(x,E).$$

ヨッテ $E=G_1$ ト置クト

$$1=\int_0^1\{\varphi_1(dx)+\varphi_2(dx)+\cdots\cdots+\varphi_{d_1}(dx)\}P(x,G_1).$$

$0\leqq P(x,G_1)\leqq 1$ 且 $\{\varphi_1+\cdots\cdots+\varphi_{d_1}\}\geqq 0$, $\{\varphi_1(G_1)+\cdots$ $\cdots+\varphi_{d_1}(G_1)\}=1$ ニヨリ, 殆ド全テノ $x\in G_1$ ニ對シ $P(x,G_1)=1$.

iii) ノ證明. (2), (3), (4) ニヨリ

$$\varphi_i(E)=\int_0^1\varphi_i(dx)\,P_1(x,E)$$

ヨッテ $E=\mathcal{E}_i$ トヲクト $1=\int_0^1\varphi_i(dx)\,C_i(x)$ ヲ得ル。
$0\leqq C_i(x)\leqq 1$ 且 $\varphi_i\geqq 0$, $\varphi_i(\mathcal{E}_i)=1$ ニヨリ $\mathcal{E}_i$ 内殆ド至ル所デ $C_i(x)=1$. 故ニ $E\in\mathcal{E}_i$ ガ $mes(E)>0$ ナラバ

$$(7)\quad P_1(x,E)=P_i(E)>0\quad(\text{殆ド全テノ } x\in\mathcal{E}_i \text{ ニ対シ}).$$

ヨッテ (2) カラ証明ヲ得ル。

iv) ノ証明. (2) ト (7) カラ明カ。 ——以上——

最後ニ一ツ

注意. P ガ G_1[1] デ $\lambda\neq 1$, $|\lambda|=1$ ナル如キ固有値モツタメノ必充條件ハ $d_1\neq 1$ ナルコトデアル。

証明. 充分. $d_1>1$ トスル。 $P\cdot\varphi_i=\varphi_{i+1}$ ($\varphi_{d_1+1}=\varphi_1$) ニヨリ $\lambda^{d_1}=1$ ナラ

$$\lambda P\cdot(\varphi_1+\lambda\varphi_2+\lambda^2\varphi_3+\cdots\cdots+\lambda^{d_1-1}\varphi_{d_1})$$

---

(1) ii) ニヨリ G_1 ヲ最初ニ出発シタ點ト考ヘルコトガ出来ル。

$$=(\varphi_1+\lambda\varphi_2+\cdots\cdots+\lambda^{d_1-1}\varphi_{d_1})$$

ヨッテ $(\varphi_1+\lambda\varphi_2+\cdots\cdots+\lambda^{d_1-1}\varphi_{d_1})$ が或ル λ ($\lambda\neq1$, $\lambda^{d_1}=1$) ニ対シ $\neq0$ ナコトガ云ヘルトヨイ。之ハ $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_{d_1}$ ガ一次独立ナコトカラワカル (E. Schmidt ノ論法)。

<u>必要</u>. $\lambda P\varphi=\varphi$, $\lambda\neq1$, $|\lambda|=1$, $\varphi\neq0$, 且ツ $d_1=1$ トシテ矛盾ヲ出ス。$d_1=1$ カラ iv) ニヨリ P^m ハ $m\to\infty$ ト共ニ一様収斂スル。一方 Lemma 3 ヲ使ヘバ $P^m\varphi=\lambda^{-m}\varphi$ ハ m ニツイテ periodic (period >1) ダカラ矛盾.

——以上——

之デ談話 724, §12 ノ終リニ述ベタ"積分方程式流ノ証明"ガ出来タ譯ニモナリマシタ。